ref : Gourdon analyse p. 252

Développement : Théorème d'abel angulaire et taubérien faible :

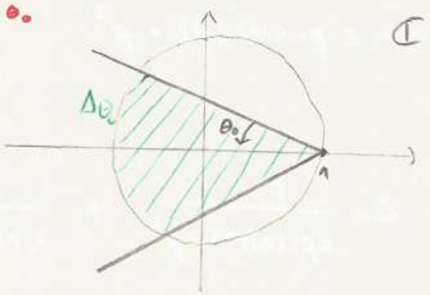
leçon 243 241 230

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière complexe à variable complexe, de rayon de convergence R, et de somme f.

Théorème d'Abel angulaire :

Supposons que $R = 1$ et $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge. On fixe $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et on pose $\Delta_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C} ; |z| < 1\} \cap \{1 - \rho . e^{i\theta} ; \rho \in \mathbb{R}_+^*, \theta \in [-\theta_0, \theta_0]\}$

On a alors $\lim\limits_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n$



Preuve :

Posons $S = \sum_{n\geq 0} a_n$, $S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$ et $R_N = S - S_N$ pour $N \in \mathbb{N}$.

▶ Etape 1 : Expression de $f(z) - S$

Soit $z \in \mathbb{C}$ tq $|z| < 1$. Pour $N \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\sum_{n=0}^{N} a_n z^n - S_N = a_0 + \sum_{n=1}^{N} (R_{n-1} - R_n)(z^n - 1) - a_0 \qquad \text{car } \forall n \geq 1, a_n = R_{n-1} - R_n$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} R_n (z^{n+1} - 1) - \sum_{n=1}^{N} R_n (z^n - 1)$$

$$= \sum_{n=1}^{N-1} R_n (z^{n+1} - z^n) + R_0 (z^1 - 1) - R_N (z^N - 1)$$

$$= (z-1) \sum_{n=0}^{N-1} R_n z^n - R_N (z^N - 1)$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient $\underbrace{f(z)}_{cv} - \underbrace{S}_{cv} = \underbrace{(z-1)}_{cv} \sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n$

ainsi cette série cv bien car tout les autre termes convergent

▶ Étape 2 : Majoration de $|f(z) - S|$

Fixons $\varepsilon > 0$, et soit $N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n > N$, $|R_n| \leq \varepsilon$. Alors $\forall z \in \mathbb{C}$ tq $|z| < 1$, on a d'après l'étape 1 :

$$|f(z) - S| \leq \left| (z-1) \sum_{n=0}^{N} R_n z^n \right| + \left| (z-1) \cdot \sum_{n=N+1}^{+\infty} R_n z^n \right|$$

$$\leq |z-1| \cdot \left(\sum_{n=0}^{N} |R_n| \right) + |z-1| \cdot \varepsilon \cdot \left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} |z^n| \right)$$

$$\leq |z-1| \left(\sum_{n=0}^{N} |R_n| \right) + \varepsilon \frac{|z-1|}{1-|z|}$$

▶ Étape 3 : Majoration de $\frac{|z-1|}{1-|z|}$

Soit $z = 1 - \rho \cdot e^{i\theta} \in \Delta_{\theta_0}$ i.e. $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $|\theta| \leq \theta_0$. Alors

$$|z|^2 = (1 - \rho . e^{i\theta})(1 - \rho . e^{-i\theta}) = 1 - 2\rho . \cos(\theta) + \rho^2$$

Supposons $\rho \leq \cos(\theta_0)^*$, on a

$$\frac{|z-1|}{1-|z|} = (1 + |z|) \frac{|z-1|}{1-|z|^2} \leq 2 \cdot \frac{\rho}{2\rho . \cos(\theta) - \rho^2} = \frac{2}{2\cos(\theta) - \rho} \leq \frac{2}{2 . \cos(\theta_0) - \cos(\theta_0)} = \frac{2}{\cos(\theta_0)}$$

* possible car $\theta_0 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donc $\cos(\theta_0) > 0$

▶ Étape 4 : Conclusion

En reprenant les résultats des étapes 2 et 3, lorsque $z \in \Delta_{\theta_0}$ est tel que $|z-1| \leq \min \left\{ \frac{\varepsilon}{1 + \sum_{n=0}^{N} |R_n|} , \cos(\theta_0) \right\}$, alors on a

$$|f(z) - S| \leq |z-1| \cdot \left(\sum_{n=0}^{N} |R_n| \right) + \varepsilon \frac{|z-1|}{1-|z|}$$

$$\leq \varepsilon + \varepsilon \cdot \frac{2}{\cos(\theta_0)} \quad \text{car } \rho = |z-1| \leq \cos(\theta_0)$$

$$\leq \varepsilon \left(1 + \frac{2}{\cos(\theta_0)} \right)$$

■

Remarques :

- Le théorème marche toujours pour $R > 1$ mais n'est pas très utile : $R > 1 \Rightarrow \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge uniformément sur $\overline{D(0,1)}$, et le théorème de la double limite assure le résultat.
- Si $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge absolument, le résultat est évident : $\sum a_n z^n$ converge alors normalement sur $\overline{D(0,1)}$, donc y est continue, particulièrement en 1.

- Application du théorème d'Abel angulaire :

$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge (critère série alternée).

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^n = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \arctan x = \frac{\pi}{4}$$

- La réciproque est fausse ! Considérer $\sum_{n\geq 0} (-1)^n z^n$

Théorème : Taubérien faible

On suppose que $R = 1$ et qu'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tq $\lim_{\substack{x\to 1^-\\ x\in\mathbb{R}}} f(x) = \ell$.

Alors $\left\{ a_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ pour } n \to +\infty \right\} \Rightarrow \sum_{n\geq 0} a_n$ converge vers ℓ.

⚠ on a pas convergence absolue

Preuve :

Soit $\varepsilon > 0$. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on note $S_N = |\ell - \sum_{n=0}^{N} a_n|$. Pour $x \in [0,1[$,

$$S_N = |\ell - f(x) + f(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n| = |\ell - f(x) + \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{N} a_n (x^n - 1)|$$

$$\leq |\ell - f(x)| + \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n| x^n + \sum_{n=0}^{N} |a_n| (1 - x^n)$$ ← cette série entière cv absolument sur $[0,1[$

$$\leq |\ell - f(x)| + \left[\sum_{n=N+1}^{+\infty} \left(\frac{n}{N}\right) \cdot |a_n| \cdot x^n\right] + (1-x) \sum_{n=0}^{N} |a_n| \cdot (1 + x + \dots + x^{n-1})$$

↑ cette série cv car $\frac{n}{N} a_n$ borné car $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$

$$\leq |\ell - f(x)| + \frac{1}{N} \cdot \left[\sup_{n > N} |n \cdot a_n|\right] \left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} x^n\right) + (1-x) \left(\sum_{n=0}^{N} n \cdot |a_n|\right)$$

↑ le sup existe car $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$

$$\leq |\ell - f(x)| + \frac{1}{N} \cdot \sup_{n>N} |n \cdot a_n| \cdot \frac{x^{N+1}}{1-x} + (1-x) \left(\sum_{n=0}^{N} n \cdot |a_n|\right)$$

$$\leq |\ell - f(x)| + \frac{1/N}{1-x} \sup_{n>N} |n \cdot a_n| + (1-x) \cdot N \cdot \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} n \cdot |a_n|\right)$$

Par hypothèse, $\sup_{n>N} |n \cdot a_n| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$ et en vertu du théorème de Césaro,

on a $\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} n \cdot |a_n| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$.

Pour $x = 1 - \frac{1}{N}$, $S_N \leq |\ell - f\left(1 - \frac{1}{N}\right)| + \sup_{n>N} |n \cdot a_n| + \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} n \cdot |a_n|$

Or $\lim_{\substack{x\to 1^-\\ x\in\mathbb{R}}} f(x) = \ell$ donc pour N assez grand, $S_N \leq \varepsilon$. ∎

Remarques :

- Ce théorème constitue une réciproque partielle au théorème d'Abel angulaire. La réciproque totale est fausse : sans la condition sur a_n, on a par exemple

$$\lim_{x \to 1^-} \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2} \quad \text{mais } \sum_{n\geq 0} (-1)^n \text{ diverge} \ldots$$

- L'hypothèse $a_n \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$ s'appelle condition taubérienne.
Le résultat est encore vrai si $a_n \underset{n \to +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n}\right)$ mais la preuve est plus difficile (taubérien de Hardy Littlewood).

Exercice d'application :

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n$ deux séries convergentes.
Soit c_n le produit de Cauchy des deux séries. Si c_n converge, alors $c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n . \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

Preuve :

$\sum_{n\geq 0} a_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n \geq 0} a_n . t^n$ série convergente de rayon $R \geq 1$
— b_n ... b_n ...

Ainsi $\sum_{n\geq 0} c_n . t^n$ de rayon $R' \geq 1$ également. De plus $\forall t \in]-1, 1[$,

$\sum_{n \geq 0} c_n t^n = \sum_{n\geq 0} a_n t^n \sum_{n \geq 0} b_n t^n$. On conclut pour $t \to 1^-$.